Exame final nacional de Matemática A (2020, Época especial)

Proposta de resolução

1.

1.1. Como as coordenadas do ponto B são $(0,2,4)$, o vetor $\overrightarrow{OB}$ tem as mesmas coordenadas, pelo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BO}$ são:

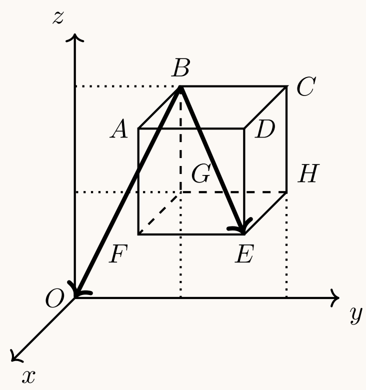
$$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -(0,2,4) = (0,-2,-4)$$

E a sua norma é:

$$\left\|\overrightarrow{BO}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{0^2+2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

Calculando a norma do vetor $\overrightarrow{BE}$, temos:

$$\left\|\overrightarrow{BE}\right\| = \sqrt{2^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$



Como o ângulo OBE é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BO}$ e $\overrightarrow{BE}$, podemos determinar a sua amplitude a partir do respetivo produto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{BO}\,\hat{}\,\overrightarrow{BE}\right) = \frac{\overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{BE}}{\left\|\overrightarrow{BO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BE}\right\|} = \frac{(0,-2,-4).(2,2,-2)}{\sqrt{20}\times\sqrt{12}} = \frac{-4+8}{\sqrt{20\times 12}} = \frac{4}{\sqrt{240}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OBE, em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{B}E = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{240}}\right) \approx 75^\circ$$

1.2. Determinando as coordenadas do ponto E, temos:

$$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,2,4) + (2,2,-2) = (2,4,2)$$

Como a reta OE é perpendicular ao plano α, um vetor diretor da reta também é um vetor normal do plano, ou seja, o vetor $\overrightarrow{OE}$ (que tem as mesmas coordenadas que o ponto E), é um vetor normal do plano α, e assim a sua equação é da forma:

$$2x + 4y + 2z + d = 0$$

Como a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz e a medida da aresta do cubo é 2, temos que as coordenadas do ponto G são (0,2,2), e como o ponto G pertence ao plano α, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

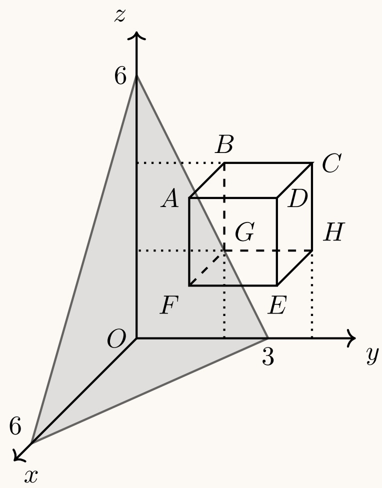
$$2(0)+4(2)+2(2)+d = 0 \Leftrightarrow 0+8+4+d = 0 \Leftrightarrow 12+d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

E assim, uma equação do plano α, é:

$$2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$$

Desta forma podemos determinar as coordenadas dos pontos do plano que intersetam os eixos coordenados:

- Ponto P $(y = 0 \wedge z = 0)$: $x + 2(0) + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$
- Ponto Q $(x = 0 \wedge z = 0)$: $0 + 2y + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$
- Ponto R $(y = 0 \wedge z = 0)$: $0 + 2(0) + z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6$



Desta forma a pirâmide $[OPQR]$ pode ser entendida como uma pirâmide cuja base é um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 e 3 unidades e cuja altura é 6, ou seja:

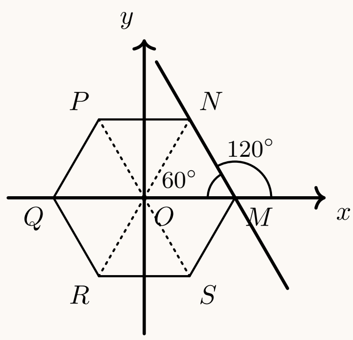
$$V_{[OPQR]} = \frac{1}{3} \times A_{[OPQ]} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 6 = 3 \times 6 = 18$$

2. Como $[MNPQRS]$ é um hexágono regular, pode ser dividido em tiângulos equiláteros, pelo que o triângulo $[OMN]$ é equilátero, temos que $C\hat{M}N = \frac{180}{3} = 60°$, e o ângulo definido pelo semi-eixo positivo Ox e a reta MN é de $180 - 60 = 120°$ ou seja a inclinação da reta MN é 120°, e assim, o declive correspondente, m_{MN}, é:

$$m_{MN} = \operatorname{tg}(120°) = -\operatorname{tg}(180 - 120°) = -\operatorname{tg}(60°) = -\sqrt{3}$$

Assim, temos que a equação reduzida da reta MN é da forma:

$$y = -\sqrt{3}x + b$$



Como o ponto $M(1,0)$ pertence à reta, podemos calcular o valor de b, substituindo as coordenadas do ponto M na condição anterior:

$$0 = -\sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow \sqrt{3} = b$$

Pelo que a equação reduzida da reta MN é:

$$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção A**

3. Como o dado tem 6 faces e é lançado 4 vezes, a quantidade de números que podem ser obtidos, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^6A'_4 = 6^4$

   Para que o número formado seja uma capicua, o algarismo dos milhares deve ser igual ao das unidades e o algarismo das dezenas deverá ser igual ao das centenas. O algarismo dos milhares não pode ser 5 nem 6, para que o números seja inferior a 5000, e também não pode ser 1 nem 3, para que o algarismo das unidades seja par, visto que devem ser iguais. Assim só existem 2 algarismos favoráveis para o primeiro dígito, 6 para o segundo (porque não existem restrições), 1 para o terceiro (porque deve ser igual ao segundo) e 1 para o quarto (porque deve ser igual ao primeiro) para que o algarismo seja uma capicua, ou seja, o número de casos favoráveis é $2 \times 6 \times 1 \times 1$

   Desta forma, a probabilidade é:

$$\frac{2 \times 6}{6^4} = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$$

   Resposta: **Opção C**

4.

   4.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos hóspedes do hotel, e os acontecimentos:
   E:≪O hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela≫
   Z:≪O hóspede ter participado ter participado na descida do rio Zêzere≫

   Temos que $P(E) = 0{,}8$; $P(Z) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{E}|Z\right) = 0{,}3$

   Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

   - $P\left(\overline{E} \cap Z\right) = P(Z) \times P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$
   - $P(E \cap Z) = P(Z) - P\left(\overline{E} \cap Z\right) = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$

	Z	$\overline{Z}$	
E	0,35	0,45	0,8
$\overline{E}$	0,15		
	0,5		1

   Assim, a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere, na forma de percentagem, é 45%, porque

$$P\left(E \cap \overline{Z}\right) = P(E) - P(E \cap Z) = 0{,}8 - 0{,}35 = 0{,}45$$

   4.2. Como apenas os 4 hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos diferentes, a forma de os distribuir, um por cada moto é: ${}^4A_4 = P_4 = 4!$

   Como devemos distribuir os restantes 3 hóspedes suecos pelos 4 lugares disponíveis, o número de formas diferentes de o fazer é ${}^4A_3$ (porque se deve considerar a ordem relevante, uma vez que as motas são diferentes), ou seja, o número total de formas distintas de distribuir os sete hóspedes pelas quatro motos, nas condições definidas, é:

$$4! \times {}^4 A_3 = 576$$

   Resposta: **Opção D**

5. Como a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica, temos que $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, com $r < 0$, porque a progressão não é monótona.

   Sabe-se que:

   - $u_3 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow u_1 \times r^2 = \frac{1}{12}$
   - $u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow u_1 \times r^{17} = 4 \times u_1 \times r^{19}$

   Resolvendo o sistema seguinte, determinamos o valor do primeiro termo e da razão da progressão:

$$\begin{cases} u_1 \times r^2 = \frac{1}{12} \\ u_1 \times r^{17} = 4 \times u_1 \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{12r^2} \times r^{17} = 4 \times \frac{1}{12r^2} \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ r^{17} = 4 \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{4} = \frac{r^{19}}{r^{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{4} = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \end{cases} \underset{r<0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\frac{12}{4}} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Assim, temos que a expressão do termo geral na forma $a \times b^n$, é:

$$u_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times (-2) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

6. Como o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$ e o inverso de $\frac{1}{2}$ é 2, todos os termos de ordem ímpar da sucessão são iguais a 2 e todos os termos de ordem par são iguais a $\frac{1}{2}$

   Assim, temos que a sucessão não é nem uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

   Por outro lado verifica-se que os termos alternam sucessivamente entre dois valores, pelo que não é monótona e como $\frac{1}{2} \leq v_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, logo (v_n) é uma sucessão limitada.

   Resposta: **Opção D**

7.

7.1. Escrevendo z_1 na f.t. temos $-1-i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-1}{-1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3.º quadrante, logo $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

E assim $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, pelo que:

- $(z_1)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\left(2\times\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{2}-2\pi\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2i$
- $(z_1)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\left(4\times\frac{5\pi}{4}\right)} = 4e^{i(5\pi)} = 4e^{i(5\pi-4\pi)} = 4e^{\pi i} = -4$

Assim, para que z_1 seja solução da equação $\dfrac{a}{z^2} + bz^4 = -2+i$, vem que:

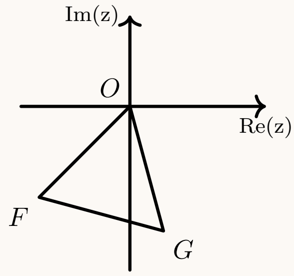
$$\frac{a}{2i} + b\times(-4) = -2+i \Leftrightarrow \frac{a(i)}{2i^2} - 4b = -2+i \Leftrightarrow \frac{ai}{2\times(-1)} - 4b = -2+i \Leftrightarrow -4b - \frac{a}{2}i = -2+i$$

Pelo que, pela igualdade de dois números complexos vem que:

$$-4b=-2 \wedge -\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow b = \frac{-2}{-4} \wedge -a = 2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \wedge a = -2$$

7.2. Escrevendo z_1 na f.t. temos $-1-i=\rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-1}{-1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3.º quadrante, logo $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$



E assim $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, pelo que, como o triângulo $[OFG]$ é equilátero, o número complexo cujo afixo é o ponto G tem módulo igual a z_1 e o argumento é $\operatorname{Arg}(z_1) + \dfrac{\pi}{3}$, ou seja, é o número complexo:

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}$$

Desta forma podemos determinar z_2 resolvendo a equação seguinte:

$$z_1\times z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}}{z_1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{19\pi}{12}\right)-\left(\frac{5\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

E assim, escrevendo z_2 na f.a. vem:

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resposta: **Opção B**

8.

8.1. Como a função f corresponde à distância ao solo de cada ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada por $[AB]$, $f(0)$ corresponde à distância ao solo do ponto da rampa assente sobre esta parede, ou seja à altura desta parede, e da mesma forma $f(21)$ corresponde à altura da parede representada por $[CD]$:

$$\overline{AB} = f(0) = 0{,}0001 \times 0^4 - 0{,}005 \times 0^3 + 0{,}11 \times 0^2 - 0 + 3{,}4 = 3{,}4$$

$$\overline{CD} = f(21) = 0{,}0001 \times 21^4 - 0{,}005 \times 21^3 + 0{,}11 \times 21^2 - 21 + 3{,}4 = 4{,}0531$$

E assim, temos que o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes, em metros, com arredondamento às décimas, é:

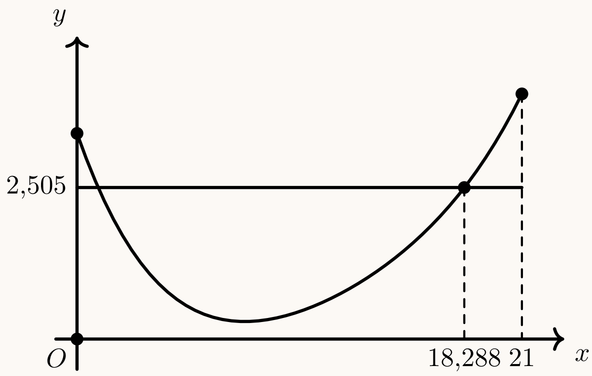
$$\left|\overline{CD} - \overline{AB}\right| = |f(21) - f(0)| \approx 0{,}7$$

Resposta: **Opção B**

8.2. Como o jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[AB]$ está a um metro desta parede, a sua distância ao solo é dada por $f(1)$. Como nesse instante, os dois jovens estão à mesma distância ao solo, a distância do jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[CD]$ está da parede representada por $[AB]$ é dada por:

$$f(x) = f(1)$$

Representado o gráfico da função f, numa janela adequada, ou seja, $x \in [0{,}21]$ e a reta de equação $y = f(1)$, e usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar os valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção, determinamos valores aproximados às centésimas das coordenadas do ponto com maior abcissa em que os dois gráficos se intersetam (por representar o jovem mais próximo da parede da direita), ou seja $(18{,}288; 2{,}505)$



Assim temos que o jovem mais próximo da parede da direita está a 18,288 metros da parede da esquerda, e como as duas paredes distam 21 metros, a distância d, deste jovem à parede da esquerda, em metros, arredondado às décimas, é:

$$d \approx 21 - 18{,}288 \approx 2{,}7$$

9. Como o domínio da função é $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, não existem assíntotas não verticais.

   E como a função resulta de operações com funções contínuas em, as retas $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, as retas definida por $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de f

   Assim temos que:

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2\times 0}-1}{\operatorname{tg} 0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{2x\cos x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{2\cos x}\right)} =$$

   (fazendo $y=2x$, temos que se $x\to 0^+$, então $y\to 0^+$)

$$= \frac{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cos x}} = \frac{1}{1\times \frac{1}{2\times \cos 0}} = \frac{1}{\frac{1}{2\times 1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

   Pelo que a reta $x=0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

   Da mesma forma, temos que:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2\times\frac{\pi}{2}}-1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^{\pi}-1}{+\infty} = 0$$

   Pelo que a reta $x=\frac{\pi}{2}$ também não é uma assíntota vertical do gráfico de f e assim podemos concluir que o gráfico de f não tem qualquer assíntota.

10.

   10.1. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=1$, pelo que

$$g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

   Como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = 1^2 - 10 + 8\ln 1 = 1 - 10 + 8\times 0 = -9 + 0 = -9$, calculando $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{k-kx} = \frac{1^2-1}{k-k\times 1} = \frac{0}{k-k} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{k-kx} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(-(x-1))}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(1-x)}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{k} = -\frac{1}{k}$$

   Assim, como $g(1)=-9$, e g é contínua, temos que:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) \Leftrightarrow -9 = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$$

   Resposta: **Opção D**

10.2. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada no intervalo $]1,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(x^2 - 10 + 8\ln x\right)' = \left(x^2\right)' - (10)' + (8\ln x)' = 2x - 0 + 8\,(\ln x)' = 2x + 8 \times \frac{1}{x} = 2x + \frac{8}{x}$$

$$g''(x) = (f'(x))' = \left(2x + \frac{8}{x}\right)' = (2x)' + \left(\frac{8}{x}\right)' = 2 + \frac{(8)' \times x - 8(x)'}{x^2} = 2 + \frac{0-8}{x^2} = 2 - \frac{8}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{8}{x^2} \underset{x>1}{\Leftrightarrow} 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \underset{x>1}{\Rightarrow} x = 2$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	1		2	$+\infty$
g''	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]1,2]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[2,+\infty[$
- tem um único ponto de inflexão no intervalo definido, cuja abcissa é $x = 2$

10.3.

Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[1,+\infty[$, é uma função contínua neste intervalo, e, por isso, também é contínua em $[\sqrt{e},e]$.

Como $e - 6 < 0 < e^2 - 2$, ou seja, $g(\sqrt{e}) < 0 < g(e)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]\sqrt{e},e[$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e},e[$

C.A.

$$g(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^2 - 10 + 8\ln\sqrt{e} = e - 10 + 8\ln 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= e - 10 + \frac{8}{2}\ln e = e - 10 + 4 \times 1 = e - 6 \approx -3{,}3$$

$$g(e) = e^2 - 10 + 8\ln e = e^2 - 10 + 8 = e^2 - 2 \approx 5{,}4$$

11.

11.1. Como:

- $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4+3\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{11}$
- $h\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5}{4+3\cos\left(2\times\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{14\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{14\pi}{6}-2\pi\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)} =$

$$= \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{11}$$

Calculando a taxa média de variação da função h no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]$, temos:

$$\text{TVM}_{\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]} = \frac{h\left(\frac{7\pi}{6}\right) - h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{11}{10} - \frac{11}{10}}{\frac{6\pi}{6}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Resposta: **Opção C**

11.2. As abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo $]-\pi,\pi[$, cuja ordenada é 2 são as soluções da equação $h(x)=2$ que pertencem ao intervalo.

Assim, resolvendo a equação, temos:

$$h(x)=2 \Leftrightarrow \frac{5}{4+3\cos(2x)} = 2 \underset{4+3\cos(2x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 5 = 2(4+3\cos(2x)) \Leftrightarrow 5 = 8+6\cos(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5-8 = 6\cos(2x) \Leftrightarrow -\frac{3}{6} = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \lor 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{2\times 3} + \frac{2k\pi}{2} \lor x = -\frac{2\pi}{2\times 3} + \frac{2k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \lor x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k=-1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \lor x = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3}$ $\left(-\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi,\pi[\right)$
- $k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \lor x = -\frac{\pi}{3}$
- $k=1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi = -\frac{4\pi}{3} \lor x = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi,\pi[\right)$

Assim, existem quatro pontos no intervalo dado cuja ordenada 2, ou seja, os pontos cujas abcissas são:

$$-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3}$$